

Spektrum Energi Analitik dari Model Pengungkungan Kuantum Tipe Kratzer dengan Parameter Fraksional dan Geometris: Pendekatan Matematis untuk Teknik Sipil

Briant Sabathino Harya Wibawa

Universitas Surakarta, Surakarta, Indonesia

Email: Briant_shw@unsa.ac.id

Article Info

Article history:

Received July 05, 2026

Revised July 28, 2026

Accepted August 10, 2026

Keywords:

Fractional quantum mechanics,
Heavy quarkonium,
Topological defects, Curved
geometry, Nikiforov–Uvarov
method, Thermodynamic
functions

ABSTRACT

The Schrödinger equation is transformed into a second-order differential equation using the Greene–Aldrich approximation and solved analytically using the generalized fractional Nikiforov–Uvarov method. The resulting energy spectrum is expressed as a function of the principal quantum number, fractional order, effective angular momentum parameter, screening parameter, and potential parameters. The spectral equation shows that variations in the confinement and geometric parameters lead to shifts in the allowed energy levels. In the classical limit, as the fractional order approaches unity, the conventional energy spectrum is recovered. From a civil engineering perspective, this mathematical formulation can be interpreted as a theoretical model for confined states in systems with spatially varying geometry and effective material parameters. Therefore, the model provides a conceptual link between quantum physics, mathematical modeling, and engineering analysis of confined or heterogeneous structures.

This is an open access article under the [CC BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license.



Article Info

Article history:

Received July 05, 2026

Revised July 28, 2026

Accepted August 10, 2026

Kata kunci:

Mekanika kuantum fraksional,
Kuarkonium berat, Cacat
topologis, Geometri
melengkung, Metode
Nikiforov–Uvarov, Fungsi
termodinamika

ABSTRAK

Persamaan Schrödinger ditransformasikan menjadi persamaan diferensial orde dua menggunakan aproksimasi Greene–Aldrich dan diselesaikan secara analitik dengan menggunakan metode Nikiforov–Uvarov fraksional tergeneralisasi. Spektrum energi yang dihasilkan dinyatakan sebagai fungsi dari bilangan kuantum utama, orde fraksional, parameter momentum sudut efektif, parameter screening, dan parameter potensial. Persamaan spektral menunjukkan bahwa perubahan pada parameter pengungkungan dan parameter geometris menghasilkan pergeseran pada tingkat energi yang diizinkan. Pada batas klasik, orde fraksional mendekati satu dan spektrum energi konvensional diperoleh kembali. Dari perspektif teknik sipil, formulasi matematis ini dapat diinterpretasikan sebagai model teoretis untuk keadaan terkungkung pada sistem yang geometri dan parameter material efektifnya bervariasi secara spasial. Oleh karena itu, model ini memberikan keterkaitan konseptual antara fisika kuantum, pemodelan matematis, dan analisis rekayasa terhadap struktur yang terkungkung atau heterogeny.

This is an open access article under the [CC BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license.



Corresponding Author:

Briant Sabathino Harya Wibawa
Universitas Surakarta
Email: Briant_shw@unsu.ac.id

PENDAHULUAN

Mekanika kuantum menyediakan kerangka matematis untuk mendeskripsikan sistem fisik pada skala mikroskopis. Salah satu besaran terpenting yang diperoleh dari persamaan Schrödinger adalah spektrum energi, karena tingkat energi yang diizinkan menentukan keadaan-keadaan yang mungkin dari suatu sistem kuantum. Oleh karena itu, solusi analitik dari persamaan Schrödinger telah banyak dikaji untuk berbagai potensial interaksi dan sistem koordinat. Beberapa pendekatan analitik, termasuk metode iterasi asimtotik, metode Nikiforov–Uvarov, dan metode hipergeometrik, telah diterapkan untuk memperoleh energi keadaan terikat pada berbagai model potensial (Bayrak et al., 2007; Edet et al., 2020; Okon et al., 2017; Sadeghi, 2007).

Salah satu potensial yang banyak digunakan untuk mendeskripsikan sistem dua benda yang terkekang adalah potensial Kratzer. Potensial ini mengandung suku tarik-menarik dan kontribusi tolak-menolak jarak pendek, serta memiliki berbagai aplikasi dalam sistem molekuler dan kuantum. Model Kratzer dapat digunakan untuk memperoleh tingkat energi vibrasi dan rotasi dari partikel-partikel yang saling berinteraksi (Edet et al., 2020; Sadeghi, 2007). Penelitian sebelumnya dengan menggunakan koordinat bisferis menunjukkan bahwa persamaan Schrödinger dengan potensial Kratzer dapat ditransformasikan menjadi persamaan hipergeometrik dan diselesaikan secara analitik untuk memperoleh spektrum energi (Wibawa et al., 2020).

Perkembangan terkini dalam model kuantum telah memperkenalkan berbagai efek tambahan ke dalam persamaan Schrödinger. Turunan fraksional, misalnya, dapat digunakan untuk membangun model matematis yang digeneralisasi, di mana spektrum energi bergantung pada suatu parameter orde fraksional. Selain itu, perubahan geometri dapat memodifikasi momentum sudut efektif dan, pada akhirnya, memengaruhi tingkat energi yang diizinkan. Modifikasi semacam ini khususnya bermanfaat untuk mempelajari sistem kuantum dalam lingkungan non-Euklidean atau lingkungan yang memiliki keterbatasan geometris.

Dalam formulasi sebelumnya, potensial Hulthén–Screened Kratzer (HSK) dikombinasikan dengan mekanika kuantum fraksional dan latar belakang ruang melengkung yang mengandung cacat cosmic string dan global monopole. Model yang dihasilkan memberikan bentuk analitik untuk nilai eigen energi dan menunjukkan bahwa parameter fraksional serta parameter geometris dapat memodifikasi struktur spektral (Inyang et al., 2022). Studi lengkap tersebut juga mempertimbangkan sifat-sifat termodinamika; namun, aspek tersebut tidak dikaji dalam penelitian ini.

Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan formulasi analitik yang ringkas dengan fokus khusus pada persamaan energi spektral. Penurunan persamaan mengikuti struktur matematis dari model HSK sebelumnya, tetapi disederhanakan untuk penerapan pada jurnal nasional yang berorientasi pada aplikasi. Perhatian khusus diberikan pada ketergantungan spektrum energi terhadap bilangan kuantum, parameter fraksional, parameter potensial, dan parameter geometris efektif.

Keterkaitan dengan bidang teknik sipil diperkenalkan melalui pemodelan matematis. Dalam struktur rekayasa, kondisi kekangan, geometri, variasi spasial, dan parameter material

efektif dapat memengaruhi respons suatu sistem. Meskipun model yang digunakan dalam penelitian ini pada dasarnya merupakan model mekanika kuantum, persamaan spektral yang diperoleh menyediakan kerangka matematis yang dapat diadaptasi untuk kajian teoretis mengenai keadaan terkungkung, perambatan gelombang, serta sistem rekayasa yang heterogen atau mengalami modifikasi geometris.

METODE

Penelitian ini menggunakan pendekatan analitik untuk memperoleh solusi energi spektral suatu sistem kuantum dua benda yang terkungkung dengan mempertimbangkan modifikasi geometris, potensial Hulthén–Screened Kratzer, serta efek turunan fraksional. Prosedur penyelesaian dilakukan secara bertahap melalui formulasi persamaan Schrödinger, pemisahan variabel radial dan sudut, penerapan aproksimasi Greene–Aldrich terhadap suku sentrifugal, serta penyelesaian persamaan diferensial yang dihasilkan menggunakan metode Nikiforov–Uvarov (NU) fraksional. Alur metode tersebut memungkinkan hubungan antara parameter potensial, bilangan kuantum, parameter fraksional, dan parameter geometris terhadap tingkat energi sistem diperoleh secara eksplisit.

Formulasi Persamaan Schrödinger

Tahap awal penelitian dilakukan dengan memformulasikan persamaan Schrödinger bergantung waktu untuk sistem dua benda menggunakan massa reduksi. Persamaan Schrödinger bergantung waktu dituliskan sebagai

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t, r, \theta, \varphi)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M_{rm}} \nabla_{LB}^2 \psi(t, r, \theta, \varphi) + V(r) \psi(t, r, \theta, \varphi) \quad (1)$$

Untuk keadaan stasioner, fungsi gelombang dipisahkan ke dalam bagian spasial dan temporal dalam bentuk

$$\psi(t, r, \theta, \varphi) = \psi(r, \theta, \varphi) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \quad (2)$$

Substitusi fungsi gelombang pada Persamaan (2) ke dalam Persamaan (1) menghasilkan persamaan Schrödinger tidak bergantung waktu,

$$-\frac{\hbar^2}{2M_{rm}} \nabla^2 \psi(r, \theta, \varphi) + V(r) \psi(r, \theta, \varphi) = E \psi(r, \theta, \varphi) \quad (3)$$

dengan $\hbar$ menyatakan konstanta Planck tereduksi, $V(r)$ merupakan potensial interaksi, E adalah nilai eigen energi, dan (μ) merupakan massa reduksi sistem. Untuk sistem yang terdiri atas dua benda dengan massa (m_1) dan (m_2), massa reduksi didefinisikan sebagai

$$M_{rm} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

Formulasi menggunakan massa reduksi memungkinkan permasalahan dua benda direduksi menjadi permasalahan efektif satu benda dalam potensial interaksi.

Dalam penelitian ini, sistem kuantum juga mempertimbangkan modifikasi geometris. Kontribusi geometris direpresentasikan melalui dua parameter geometris efektif. Parameter pertama digunakan untuk merepresentasikan cacat sudut, sedangkan parameter kedua merepresentasikan modifikasi geometris tambahan pada sistem. Dengan menggunakan koordinat bola, operator Laplace–Beltrami yang bersesuaian dengan geometri termodifikasi dinyatakan sebagai

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\gamma^2 r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\alpha^2 \gamma^2 r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (5)$$

Kehadiran parameter geometris dalam operator tersebut menyebabkan bagian sudut dari persamaan Schrödinger mengalami modifikasi. Akibatnya, nilai eigen sudut tidak lagi hanya ditentukan oleh bilangan kuantum sudut konvensional, tetapi membentuk bilangan kuantum sudut efektif. Dengan demikian, kontribusi geometri secara langsung masuk ke dalam persamaan radial dan selanjutnya memengaruhi spektrum energi sistem.

Formulasi Potensial dan Persamaan Radial

Interaksi antara kedua benda dalam penelitian ini direpresentasikan menggunakan potensial Hulthén–Screened Kratzer [6] yang dinyatakan sebagai

$$V(r) = -\frac{Ae^{-\delta r}}{1 - e^{-\delta r}} - \frac{Be^{-\delta r}}{r} + \frac{Ce^{-\delta r}}{r^2} \quad (6)$$

Dalam formulasi tersebut, parameter yang berkaitan dengan potensial Hulthén merepresentasikan kekuatan interaksi dan parameter screening mengontrol karakteristik peluruhan potensial. Sementara itu, parameter D_e dan r_e masing-masing merepresentasikan energi disosiasi dan panjang ikatan kesetimbangan.

Fungsi gelombang kemudian dipisahkan menjadi komponen radial dan sudut melalui bentuk

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{R(r)}{r} f(\theta) e^{im\phi} \quad (7)$$

Pemisahan variabel tersebut menghasilkan persamaan radial yang memuat kontribusi energi, potensial interaksi, serta suku sentrifugal. Persamaan radial yang diperoleh dituliskan sebagai

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{2M_{rm}}{\hbar^2} (E - V(r)) R(r) - \frac{l_\alpha(l_\alpha + 1)}{\gamma^2 r^2} R(r) = 0 \quad (8)$$

Karena adanya modifikasi geometris, kontribusi momentum sudut dalam persamaan radial dinyatakan menggunakan bilangan kuantum sudut efektif,

$$l_\alpha = l + |m| \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \quad (9)$$

yang menunjukkan bahwa parameter geometris mengubah momentum sudut efektif sistem. Perubahan tersebut selanjutnya memberikan kontribusi langsung terhadap persamaan radial dan, pada akhirnya, terhadap nilai energi spektral yang diperoleh.

Transformasi Persamaan Radial dan Aproksimasi Greene–Aldrich

Persamaan radial yang diperoleh masih mengandung suku sentrifugal yang, dalam kombinasi dengan potensial terscreening, menyebabkan persamaan diferensial sulit diselesaikan secara analitik dalam bentuk langsung. Oleh karena itu, digunakan aproksimasi Greene–Aldrich untuk merepresentasikan suku sentrifugal dalam bentuk yang sesuai dengan struktur potensial Hulthén–Screened Kratzer. Aproksimasi tersebut dinyatakan sebagai

$$h = e^{-\delta r} \quad (10)$$

Selanjutnya diperkenalkan suatu variabel transformasi dan parameter bantu yang sesuai,

$$\frac{\partial^2 R(h)}{\partial h^2} + \frac{(1-h)}{h(1-h)} \frac{\partial R(h)}{\partial h} + \frac{1}{h^2(1-h)^2} [(-\tau_1 h^2 + \tau_2 h - \tau_3)] R(h) = 0 \quad (11)$$

sehingga persamaan radial dapat ditransformasikan menjadi bentuk persamaan diferensial yang lebih sederhana,

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -\omega + \chi \quad \tau_2 = -2\omega + \varrho_0 - \varrho_1 \quad \tau_3 = -\omega + \varrho_0 \quad \omega = \frac{2M_{rm}E}{\hbar^2 \delta^2} \\ \varrho_0 &= \frac{2M_{rm}A}{\hbar^2 \delta^2} + \frac{2M_{rm}B}{\hbar^2 \delta} \quad \varrho_1 = \frac{2M_{rm}C}{\hbar^2} \quad \chi = \frac{l_\alpha(l_\alpha+1)}{\gamma^2} \end{aligned} \quad (12)$$

dengan parameter-parameter yang menghubungkan besaran fisik sistem, karakteristik potensial, bilangan kuantum, dan kontribusi geometris. Formulasi tersebut menjadi dasar untuk menerapkan metode penyelesaian Nikiforov–Uvarov pada persamaan radial yang telah ditransformasikan. Dengan demikian, aproksimasi Greene–Aldrich berperan dalam mengubah bentuk suku sentrifugal sehingga persamaan radial dapat direduksi ke bentuk diferensial yang sesuai untuk prosedur penyelesaian analitik.

Formulasi Fraksional dan Metode Nikiforov–Uvarov

Untuk memasukkan efek fraksional ke dalam sistem, persamaan radial selanjutnya diformulasikan menggunakan turunan fraksional tergeneralisasi dengan orde fraksional tertentu. Turunan fraksional yang digunakan dalam penelitian ini didefinisikan sebagai

$$D^{\alpha_{frac}}[\psi(h)] = Kh^{1-\alpha_{frac}}\psi'(h) \quad (13)$$

dengan parameter-parameter yang menyertainya diberikan pada

$$K = \frac{\Gamma(\beta_{frac})}{\Gamma(\beta_{frac}-\alpha_{frac}+1)}, \text{ with } 0 < \alpha_{frac} \leq 1, 0 < \beta_{frac} \leq 1 \quad (14)$$

Turunan kedua fraksional yang bersesuaian kemudian dirumuskan sebagai

$$D^{\alpha_{frac}}[D^{\alpha_{frac}}\psi(h)] = K^2[(1-\alpha_{frac})h^{1-2\alpha_{frac}}\psi'(h) + h^{2-2\alpha_{frac}}\psi''(h)] \quad (15)$$

Penggunaan operator fraksional tersebut memungkinkan efek orde fraksional dimasukkan secara eksplisit ke dalam persamaan diferensial radial. Dengan demikian, struktur persamaan yang dihasilkan tidak hanya bergantung pada parameter potensial dan bilangan kuantum, tetapi juga pada parameter fraksional yang mengontrol modifikasi terhadap dinamika sistem.

Persamaan diferensial fraksional yang telah diperoleh selanjutnya diselesaikan menggunakan metode Nikiforov–Uvarov (NU) (Nikiforov & Uvarov, 1988). Metode ini digunakan untuk mentransformasikan persamaan diferensial ke dalam bentuk standar sehingga solusi analitik dapat diperoleh melalui penentuan fungsi-fungsi polinomial dan kondisi kuantisasi yang bersesuaian. Prosedur NU diterapkan pada persamaan radial yang telah mengandung parameter potensial, bilangan kuantum efektif, parameter geometris, dan parameter fraksional.

Hasil penerapan metode tersebut menghasilkan kondisi kuantisasi sistem yang dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} n\kappa_2 - (2n+1)\kappa_5 + (2n+1)(\sqrt{\kappa_9} + \kappa_3\sqrt{\kappa_8}) + n(n-1)\kappa_3 + \kappa_7 + 2\kappa_3\kappa_8 \\ + 2\sqrt{\kappa_8\kappa_9} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Persamaan (16) menjadi kondisi utama yang menentukan keadaan-keadaan kuantum yang diizinkan. Dengan memasukkan hubungan antara parameter-parameter sistem ke dalam kondisi kuantisasi tersebut, nilai eigen energi dapat ditentukan secara analitik.

Penentuan Energi Spektral

Tahap terakhir dalam metode penelitian adalah memperoleh persamaan energi spektral dengan mensubstitusikan parameter-parameter model ke dalam kondisi kuantisasi pada Persamaan (16). Hasil substitusi tersebut menghasilkan nilai eigen energi dalam bentuk

$$E = Q_m - \Xi \left[\frac{S_m}{(v_m + n)} - (v_m + n) \right]^2 \quad (17)$$

dengan parameter-parameter yang digunakan dalam persamaan energi diberikan oleh

$$Q_m = \frac{1}{4} (K\alpha_{frac} - 1)^2 \Lambda \delta^2 + \chi \Lambda \delta^2, \Xi = \frac{1}{4} K^2 \alpha_{frac}^2 \Lambda \delta^2, \Lambda = \frac{\hbar^2}{2M_{rm}}, S_m = \frac{Q_0 - \chi}{K^2 \alpha_{frac}^2}, \quad (18)$$
$$v_m = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{(Q_1 + \chi)}{K^2 \alpha_{frac}^2}}$$

Persamaan (17) merupakan hasil akhir dari prosedur analitik yang digunakan dalam penelitian ini. Persamaan tersebut menunjukkan bahwa energi spektral sistem kuantum dua benda yang terkekang dipengaruhi oleh beberapa kelompok parameter utama, yaitu bilangan kuantum, parameter fraksional, parameter potensial, serta parameter geometris. Secara khusus, kontribusi geometris memengaruhi bilangan kuantum sudut efektif, sedangkan parameter fraksional memodifikasi struktur persamaan diferensial dan kondisi kuantisasi. Di sisi lain, parameter yang terdapat dalam potensial Hulthén–Screened Kratzer menentukan karakteristik interaksi antara kedua benda.

Dengan demikian, keseluruhan prosedur analitik dalam penelitian ini dapat diringkas menjadi empat tahap utama, yaitu: (1) formulasi persamaan Schrödinger untuk sistem dua benda menggunakan massa reduksi dan geometri termodifikasi; (2) pemisahan variabel dan pembentukan persamaan radial dengan potensial Hulthén–Screened Kratzer; (3) penerapan aproksimasi Greene–Aldrich dan formulasi turunan fraksional untuk memperoleh persamaan radial dalam bentuk yang dapat diselesaikan secara analitik; dan (4) penerapan metode Nikiforov–Uvarov untuk memperoleh kondisi kuantisasi dan persamaan energi spektral. Kerangka tersebut digunakan sebagai dasar untuk menganalisis pengaruh parameter potensial, bilangan kuantum, parameter fraksional, dan parameter geometris terhadap spektrum energi sistem.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil analitik penelitian ini berupa persamaan energi spektral yang diperoleh melalui penyelesaian persamaan Schrödinger untuk sistem kuantum dua benda dengan potensial Hulthén–Screened Kratzer, modifikasi geometris, dan formulasi fraksional. Persamaan energi yang diperoleh menunjukkan bahwa tingkat energi sistem tidak hanya ditentukan oleh bilangan kuantum, tetapi juga dipengaruhi oleh parameter potensial, orde fraksional, serta parameter geometris yang memodifikasi momentum sudut efektif. Dengan demikian, hasil penelitian memberikan suatu formulasi spektral yang memperlihatkan keterkaitan antara karakteristik interaksi, kondisi pengungkungan, geometri sistem, dan struktur operator diferensial terhadap keadaan energi yang diizinkan.

Struktur Energi Spektral dan Pengaruh Bilangan Kuantum

Persamaan energi spektral pada Persamaan (17) menunjukkan bahwa bilangan kuantum merupakan salah satu parameter utama yang menentukan keadaan energi sistem. Peningkatan bilangan kuantum menyebabkan perubahan pada besaran yang terdapat dalam hubungan spektral, sehingga keadaan kuantum yang berbeda menghasilkan nilai energi yang berbeda.

Dalam konteks sistem yang terkungkung, bilangan kuantum digunakan untuk membedakan keadaan dasar dan keadaan tereksitasi. Keadaan dasar berkaitan dengan nilai bilangan kuantum terkecil yang diizinkan, sedangkan nilai bilangan kuantum yang lebih tinggi merepresentasikan keadaan tereksitasi.

Secara matematis, keberadaan bilangan kuantum dalam persamaan energi menunjukkan bahwa solusi persamaan Schrödinger tidak menghasilkan spektrum energi kontinu, melainkan keadaan-keadaan energi tertentu yang memenuhi kondisi kuantisasi. Dengan demikian, struktur spektral yang diperoleh merupakan konsekuensi langsung dari penerapan kondisi batas dan kondisi kuantisasi pada penyelesaian persamaan radial menggunakan metode Nikiforov–Uvarov.

Hubungan tersebut juga menunjukkan bahwa perubahan keadaan kuantum dapat dipahami sebagai perubahan konfigurasi solusi yang diperbolehkan oleh sistem. Dalam sistem terkungkung, kondisi potensial dan kontribusi sentrifugal membatasi keadaan yang dapat ditempati sehingga hanya kombinasi parameter tertentu yang memenuhi kondisi kuantisasi. Oleh karena itu, bilangan kuantum berperan sebagai indeks yang membedakan tingkat energi sekaligus menggambarkan struktur diskrit dari spektrum sistem.

Dalam penelitian ini, pembahasan pengaruh bilangan kuantum dibatasi pada hubungan analitik yang ditunjukkan oleh Persamaan (17). Tidak dilakukan perhitungan numerik maupun penyajian grafik perubahan energi terhadap bilangan kuantum. Pembatasan tersebut sesuai dengan tujuan penelitian yang berfokus pada formulasi analitik persamaan energi spektral.

Pengaruh Parameter Fraksional terhadap Spektrum Energi

Parameter fraksional merupakan salah satu karakteristik utama yang membedakan formulasi yang dikembangkan dalam penelitian ini dari formulasi Schrödinger konvensional. Berdasarkan Persamaan (17) dan parameter-parameter turunannya, orde fraksional muncul dalam beberapa besaran yang membentuk hubungan energi spektral. Oleh karena itu, perubahan orde fraksional tidak hanya mengubah satu parameter dalam persamaan energi, tetapi dapat memengaruhi beberapa komponen matematis secara simultan.

Kehadiran parameter fraksional menyebabkan hubungan antara parameter sistem dan energi menjadi lebih kompleks dibandingkan formulasi nonfraksional. Pengaruh tersebut dapat dipahami karena turunan fraksional mengubah struktur operator diferensial yang digunakan untuk mendeskripsikan sistem. Dengan kata lain, parameter fraksional tidak semata-mata dapat dipandang sebagai parameter tambahan pada potensial, tetapi berperan dalam memodifikasi operator yang menentukan keadaan kuantum.

Pada batas ketika orde fraksional mendekati orde integer yang bersesuaian dengan formulasi konvensional, turunan tergeneralisasi mendekati turunan biasa. Dalam kondisi tersebut, formulasi fraksional yang digunakan dalam penelitian ini secara matematis mendekati formulasi mekanika kuantum konvensional. Batas ini penting karena menunjukkan konsistensi formulasi yang dikembangkan: model fraksional tetap dapat direduksi ke model nonfraksional ketika parameter fraksional berada pada kondisi batas yang sesuai.

Dari perspektif fisis, perubahan parameter fraksional dapat diinterpretasikan sebagai perubahan terhadap kondisi pengungkungan efektif sistem. Namun, interpretasi tersebut harus dipahami sebagai konsekuensi dari formulasi matematis model dan bukan sebagai perubahan sederhana pada kekuatan potensial. Parameter fraksional bekerja melalui operator diferensial sehingga perubahan nilainya dapat memengaruhi keseluruhan struktur solusi dan kondisi kuantisasi.

Dengan demikian, formulasi fraksional memberikan derajat kebebasan tambahan dalam menggambarkan sistem yang memiliki karakteristik diferensial yang lebih umum. Persamaan energi spektral yang dihasilkan memungkinkan pengaruh parameter fraksional terhadap keadaan energi dianalisis secara eksplisit dalam kerangka analitik.

Pengaruh Modifikasi Geometris

Selain parameter potensial dan fraksional, hasil penelitian menunjukkan bahwa geometri sistem memiliki kontribusi langsung terhadap spektrum energi. Kontribusi geometris masuk melalui bilangan kuantum sudut efektif yang diperoleh dari penyelesaian bagian sudut persamaan Schrödinger. Karena bilangan kuantum sudut efektif bergantung pada parameter geometris, perubahan geometri akan menyebabkan perubahan terhadap kontribusi sudut dalam persamaan radial.

Secara matematis, mekanisme tersebut menunjukkan bahwa modifikasi geometri tidak hanya mengubah representasi ruang tempat sistem didefinisikan, tetapi juga memengaruhi permasalahan nilai eigen yang harus diselesaikan. Perubahan parameter geometris menghasilkan perubahan momentum sudut efektif dan selanjutnya memengaruhi kondisi kuantisasi serta nilai energi yang diizinkan.

Konsekuensi penting dari hubungan tersebut adalah bahwa dua sistem dengan parameter potensial dan bilangan kuantum yang sama secara umum dapat memiliki struktur spektral yang berbeda apabila parameter geometrinya berbeda. Dengan demikian, geometri menjadi salah satu komponen yang secara intrinsik menentukan karakteristik spektrum.

Pengaruh geometris juga dapat dikaitkan dengan perubahan degenerasi dan distribusi keadaan energi. Karena kontribusi sudut merupakan bagian dari struktur nilai eigen, perubahan momentum sudut efektif dapat mengubah hubungan antara keadaan-keadaan kuantum yang sebelumnya memiliki karakteristik spektral tertentu. Namun, karena penelitian ini tidak melakukan evaluasi numerik terhadap parameter geometris, perubahan kuantitatif terhadap degenerasi atau posisi tingkat energi tidak ditentukan secara numerik.

Hasil ini menegaskan bahwa dalam formulasi sistem kuantum yang dikaji, geometri dan dinamika tidak dapat sepenuhnya dipisahkan. Parameter geometris masuk ke dalam persamaan energi melalui struktur sudut dan akhirnya berkontribusi terhadap spektrum energi sistem.

Peran Parameter Potensial dan Screening

Persamaan energi spektral juga memperlihatkan bahwa karakteristik interaksi ditentukan oleh parameter-parameter yang terdapat dalam potensial Hulthén–Screened Kratzer. Parameter-parameter tersebut mengontrol kekuatan interaksi serta karakteristik pengungkungan yang dialami oleh sistem. Perubahan parameter potensial akan memengaruhi bentuk potensial efektif dan selanjutnya mengubah solusi persamaan radial.

Khususnya, parameter screening menentukan karakteristik jangkauan spasial interaksi. Keberadaan screening menyebabkan interaksi mengalami perubahan terhadap jarak sehingga potensial tidak hanya ditentukan oleh kekuatan interaksi, tetapi juga oleh bagaimana interaksi tersebut berkurang pada jarak tertentu. Oleh karena itu, parameter screening masuk ke dalam struktur persamaan radial melalui bentuk potensial yang telah ditransformasikan menggunakan aproksimasi Greene–Aldrich.

Dalam konteks persamaan energi, perubahan parameter screening akan diteruskan melalui parameter-parameter bantu yang digunakan dalam transformasi persamaan radial. Dengan demikian, pengaruh screening terhadap energi merupakan hasil kumulatif dari

perubahan potensial, transformasi radial, dan kondisi kuantisasi. Hubungan ini menunjukkan bahwa struktur spektrum energi sangat bergantung pada karakteristik interaksi yang digunakan untuk merepresentasikan sistem.

Hasil tersebut juga memperlihatkan pentingnya pemilihan potensial dalam formulasi analitik. Potensial Hulthén–Screened Kratzer memungkinkan karakteristik interaksi dengan unsur screening direpresentasikan dalam bentuk yang masih memungkinkan dilakukannya pendekatan analitik setelah penerapan aproksimasi Greene–Aldrich.

Interpretasi Fisis dan Matematis Persamaan Energi

Secara keseluruhan, karakteristik utama Persamaan (17) adalah ketergantungannya terhadap sejumlah parameter yang secara bersama-sama mengendalikan kondisi pengungkungan sistem. Parameter potensial menentukan karakteristik interaksi, parameter screening mengontrol jangkauan efektif interaksi, bilangan kuantum menentukan keadaan kuantum yang diizinkan, parameter fraksional memodifikasi operator diferensial, sedangkan parameter geometris memengaruhi momentum sudut efektif.

Hubungan tersebut memperlihatkan bahwa spektrum energi merupakan hasil interaksi antara beberapa aspek model, bukan akibat satu parameter tunggal. Perubahan pada salah satu kelompok parameter dapat diteruskan melalui parameter-parameter bantu dan akhirnya memengaruhi kondisi kuantisasi. Dengan demikian, Persamaan (17) dapat dipandang sebagai representasi matematis terpadu dari pengaruh dinamika, geometri, dan struktur diferensial terhadap nilai eigen energi.

Dari sisi matematis, parameter fraksional memiliki karakteristik yang berbeda dari parameter potensial dan geometris. Parameter potensial mengubah fungsi interaksi yang terdapat dalam persamaan Schrödinger, parameter geometris mengubah kontribusi sudut dan momentum sudut efektif, sedangkan parameter fraksional mengubah struktur operator diferensial. Perbedaan mekanisme tersebut penting dalam memahami bagaimana masing-masing parameter memengaruhi solusi.

Sementara itu, parameter geometris dapat memengaruhi distribusi keadaan energi melalui perubahan momentum sudut efektif. Hal ini menunjukkan bahwa struktur ruang atau geometri yang digunakan dalam model dapat menjadi bagian integral dari permasalahan nilai eigen. Dengan demikian, hasil penelitian tidak hanya memberikan persamaan energi, tetapi juga menunjukkan bagaimana perubahan operator, potensial, dan geometri secara matematis dapat menghasilkan perubahan spektrum.

Keterkaitan dengan Permasalahan Nilai Eigen dalam Teknik Sipil

Meskipun sistem fisik yang dikaji dalam penelitian ini merupakan sistem kuantum dua benda, struktur matematis hasil penelitian memiliki keterkaitan konseptual dengan berbagai permasalahan nilai eigen dalam bidang teknik sipil. Keterkaitan tersebut tidak berarti bahwa model kuantum yang digunakan dapat secara langsung menggantikan model mekanika struktur, melainkan terletak pada kesamaan bentuk matematis permasalahan yang melibatkan operator, fungsi keadaan, dan nilai eigen.

Dalam analisis struktur, berbagai permasalahan dinamik diformulasikan sebagai permasalahan nilai eigen. Analisis getaran pada bangunan, jembatan, balok, pelat, maupun cangkang, misalnya, melibatkan penentuan nilai eigen yang berkaitan dengan frekuensi alami serta bentuk mode struktur. Dalam bentuk umum, permasalahan tersebut dapat dituliskan sebagai

$$[K]\{u\} = \lambda[M]\{u\} \quad (19)$$

dengan matriks kekakuan merepresentasikan karakteristik kekakuan sistem, matriks massa merepresentasikan distribusi massa, vektor mode merepresentasikan bentuk mode, dan nilai eigen berkaitan dengan karakteristik frekuensi alami sistem. Untuk sistem struktur tanpa redaman, formulasi tersebut dapat dinyatakan kembali melalui

$$\lambda = \omega_n^2 \quad (20)$$

yang selanjutnya memberikan hubungan

$$\omega_n = \sqrt{\lambda} \quad (21)$$

Hubungan tersebut menunjukkan bahwa frekuensi alami struktur diperoleh dari solusi permasalahan nilai eigen. Dengan demikian, perubahan parameter massa, kekakuan, atau karakteristik geometris struktur dapat menyebabkan perubahan nilai eigen dan bentuk mode yang dihasilkan.

Persamaan Schrödinger dalam penelitian ini juga merupakan permasalahan nilai eigen. Persamaan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk umum sebagai

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad (22)$$

dengan energi sistem berperan sebagai nilai eigen dan fungsi gelombang berperan sebagai fungsi eigen. Oleh karena itu, terdapat korespondensi matematis antara nilai eigen energi pada sistem kuantum dan nilai eigen pada sistem struktur, meskipun keduanya memiliki makna fisis yang berbeda.

Tabel 1. Korespondensi konseptual antara model spektral kuantum dan teknik sipil

Model Kuantum	Analogi dalam Teknik Sipil
Nilai eigen energi E_n	Nilai eigen struktur λ atau ω_n^2
Bilangan kuantum n	Nomor mode getaran
Fungsi gelombang ψ	Bentuk mode struktur $\{u\}$
Potensial $V(r)$	Medan pengungkungan/kekakuan efektif
Massa reduksi M_{rm}	Parameter massa efektif
Parameter geometris	Parameter geometris struktur
Parameter fraksional	Parameter material efektif tergeneralisasi
Pergeseran tingkat energi	Perubahan respons modal/nilai eigen

Korespondensi tersebut bersifat matematis dan konseptual, bukan merupakan klaim bahwa mekanika kuantum secara langsung menggantikan mekanika struktur. Nilai penting dari analogi ini terletak pada kesamaan kerangka penyelesaian, yaitu bagaimana perubahan operator, parameter sistem, dan kondisi geometris dapat menghasilkan perubahan nilai eigen.

Dalam konteks teknik sipil, prinsip tersebut relevan untuk memahami bahwa respons modal suatu struktur sangat dipengaruhi oleh parameter pengatur yang terdapat dalam operator sistem. Perubahan kekakuan, massa, geometri, maupun karakteristik material dapat mengubah nilai eigen dan bentuk mode. Hal tersebut secara konseptual sejalan dengan hasil penelitian ini, di mana perubahan potensial, geometri, dan parameter fraksional menghasilkan perubahan pada struktur nilai eigen energi.

Pendekatan ini berpotensi menjadi landasan konseptual untuk pengembangan model nilai eigen tergeneralisasi pada sistem rekayasa tertentu. Sebagai contoh, material struktur heterogen dapat memiliki parameter efektif yang berubah secara spasial. Dalam situasi tersebut, operator yang mengatur sistem juga dapat mengalami perubahan sehingga permasalahan nilai eigen

menjadi lebih kompleks. Model kuantum yang dikembangkan dalam penelitian ini memberikan contoh analitik mengenai bagaimana parameter tambahan dapat dimasukkan ke dalam operator dan selanjutnya memengaruhi spektrum.

Dengan demikian, kontribusi penelitian terhadap bidang teknik sipil terletak terutama pada kerangka matematisnya. Persamaan energi spektral dapat dipandang sebagai prototipe analitik untuk memahami sensitivitas nilai eigen terhadap parameter potensial, geometri, dan parameter operator yang digeneralisasi. Pemanfaatan langsung pada struktur sipil tetap memerlukan formulasi mekanika struktur dan validasi numerik tersendiri.

Sintesis Hasil dan Implikasi

Berdasarkan keseluruhan hasil, dapat disimpulkan bahwa energi spektral sistem merupakan fungsi dari interaksi antara bilangan kuantum, parameter potensial, screening, parameter fraksional, dan geometri. Bilangan kuantum menentukan keadaan diskrit yang diperbolehkan, parameter potensial dan screening menentukan karakteristik interaksi, parameter geometris mengubah momentum sudut efektif, sedangkan parameter fraksional memodifikasi operator diferensial yang mendasari sistem.

Temuan analitik tersebut memperlihatkan bahwa modifikasi terhadap operator pengatur, kondisi potensial, atau geometri dapat menghasilkan perubahan pada spektrum nilai eigen. Prinsip ini bersifat lebih umum daripada sistem kuantum yang dikaji karena permasalahan nilai eigen juga muncul dalam berbagai sistem fisik dan rekayasa. Dalam konteks teknik sipil, prinsip tersebut dapat ditemukan pada analisis modal dan getaran, ketika perubahan parameter struktur menyebabkan perubahan frekuensi alami dan bentuk mode.

Dengan demikian, hasil penelitian memberikan dua kontribusi utama. Pertama, secara teoritis, penelitian menghasilkan formulasi analitik energi spektral untuk sistem kuantum dua benda dengan kombinasi potensial Hulthén–Screened Kratzer, modifikasi geometris, dan parameter fraksional. Kedua, secara konseptual, penelitian menunjukkan bahwa kerangka nilai eigen yang digunakan memiliki kesepadanan matematis dengan permasalahan nilai eigen pada sistem struktur. Namun, karena penelitian ini berfokus pada formulasi analitik, validasi numerik, simulasi parametrik, dan perbandingan dengan data eksperimen belum dilakukan dan dapat menjadi arah pengembangan penelitian selanjutnya

KESIMPULAN

Penelitian ini berhasil mengembangkan model energi spektral analitik untuk sistem pengungkungan kuantum Hulthén–Screened Kratzer dengan mempertimbangkan parameter fraksional dan geometris melalui aproksimasi Greene–Aldrich dan metode Nikiforov–Uvarov fraksional tergeneralisasi. Spektrum energi yang diperoleh bergantung pada bilangan kuantum, parameter potensial, parameter screening, orde fraksional, dan parameter geometris efektif, dengan parameter fraksional memodifikasi nilai eigen melalui operator diferensial tergeneralisasi dan parameter geometris memengaruhi momentum sudut efektif. Formulasi ini juga menunjukkan keterkaitan konseptual dengan permasalahan nilai eigen dalam teknik sipil, khususnya analisis getaran dan gelombang, meskipun model yang dikembangkan bersifat teoretis dan bukan pengganti langsung mekanika struktur konvensional. Penelitian selanjutnya dapat mengembangkan formulasi ini untuk sistem rekayasa dengan parameter material yang bervariasi secara spasial, efek nonlokal, dan perambatan gelombang tergeneralisasif.

DAFTAR PUSTAKA

- Bayrak, O., Boztosun, I., & Ciftci, H. (2007). Exact analytical solutions to the Kratzer potential by the asymptotic iteration method. *International Journal of Quantum Chemistry*, 107, 540–544.
- Edet, C. O., Okorie, U. S., Ngiangia, A. T., & Ikot, A. N. (2020). Bound state solutions of the Schrödinger equation for the modified Kratzer potential plus screened Coulomb potential. *Indian Journal of Physics*, 94, 425–433.
- Inyang, E. P., Iwuji, P. C., Ntibi, J. E., William, E. S., & Ibanga, E. A. (2022). Hulthén–Screened Kratzer potential and bound-state analysis. *East European Journal of Physics*, 2, 12–22.
- Nikiforov, A. F., & Uvarov, V. B. (1988). *Special Functions of Mathematical Physics*. Birkhäuser.
- Okon, I. B., Popoola, O., & Isonguyo, C. N. (2017). Approximate Solutions of Schrödinger Equation with Some Diatomic Molecular Interactions Using Nikiforov-Uvarov Method. *Advances in High Energy Physics*, 2017.
- Sadeghi, J. (2007). Factorization Method and Solution of the Non-Central Modified Kratzer Potential. *Acta Physica Polonica A*, 112, 23–28.
- Wibawa, B. S. H., Suparmi, A., & Cari, C. (2020). The solution of Schrodinger equation in bispherical coordinate with Kratzer potential using Hypergeometry method. *Journal of Physics: Theories and Applications*, 4, 48–58.